学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　　名	いぬい　たかひさ 戌亥　隆恭
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学 位 記 番 号	理　博　　第　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研 究 科・専 攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

GLOBAL DYNAMICS OF SOLUTIONS WITH GROUP INVARIANCE FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

（非線形シュレディンガー方程式に対する群不変な解の大域ダイナミクス）

論 文 調 査 委 員	（主査）　堤　誉志雄　教　授 上田　哲生　教　授 國府　寛司　教　授

理　学　研　究　科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	戊亥　隆恭
論文題目	GLOBAL DYNAMICS OF SOLUTIONS WITH GROUP INVARIANCE FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION		

（論文内容の要旨）

学位論文では, 以下の集約型質量優臨界かつエネルギー劣臨界非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題に対して，解の大域的漸近挙動の分類と初期値による漸近挙動の決定が考察されている．

$$i\partial_t u+\Delta u+|u|^{p-1}u=0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \tag{1}$$
$$u(0,x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{2}$$

但し，$1+4/d<p<1+4/(d-2)$ ($d=1,2$ のとき $d=\infty$) とする．このとき，適当な初期条件の下で，解 u は次のエネルギーと質量の保存則を持つ．

$$E(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+a}}^{p+1},$$
$$M(u)=\|u\|_{L^2}^2.$$

解の漸近挙動としては，十分時間が経過した後に摂動のない線形方程式の解に漸近する散乱現象や有限時間内に特異性を持つ解の爆発現象が知られている．一般解の大域挙動を決定することは重要な研究であるが，きわめて困難である．そこでまず，比較的情報の多い基底状態を基準として，研究が進められてきた．期待状態とは定在波の中で作用が最小のものを言う．ここで，方程式 (1) の解 $u(t,x)$ が定在波とは，周波数 $\omega>0$ に対し，$u(t,x)=e^{i\omega t}\varphi(x)$ と表せる (1) の非自明解のことである．関数 $e^{i\omega t}\varphi$ が (1) の定在波であることと φ が定常方程式

$$-\Delta\varphi+\omega\varphi-|\varphi|^{p-1}\varphi=0,\quad \varphi(x):\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$$

の非自明解であることは同値であり，基底状態は球対称かつ正値であることが知られている．さらに，

$$S_\omega(\varphi)=E(\varphi)+\frac{\omega}{2}M(\varphi),$$
$$K(\varphi)=\frac{2}{d}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2-\frac{p-1}{p+1}\|\varphi\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

とすると，基底状態は最小化問題

$$l_\omega=\inf\bigl\{S_\omega(\varphi)|\ \varphi\in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\},K(\varphi)=0\bigr\}. \tag{3}$$

の最小値を達成する H^1 の元であることも知られている．以下で，S_ω は作用と呼ぶことにする．

これら基底状態の変分法的特徴付けと Kenig and Merle の最小爆発解論法を使い，Fang, Xie and Cazenave (2011) と Akahori and Nawa (2013) により，初期値 u_0 が $S_\omega(u_0) < l_\omega$ を満たすとき，$K(u_0) < 0$ なら解は有限時間爆発し，$K(u_0) \geq 0$ なら散乱することが示されていた．しかし，基底状態より大きな作用に対しては，解の漸近挙動を解析するのに役立つような先験的評価を導くことは困難であり，先行研究はほとんどなかった．この問題に対して，戍亥氏は基底状態の対称性に着目し，それと異なる対称性を持つ関数の空間で考えれば基底状態作用レベルの制限をある程度克服できることを示した．たとえば，初期値 u_0 が奇関数であり $S_\omega(u_0) < 2l_\omega$ を満たすとき，$K(u_0) < 0$ なら解は有限時間爆発し，$K(u_0) \geq 0$ なら散乱することを証明した．作用の大きさの条件に現れる l_ω を $2l_\omega$ にすることができた理由は，最小化問題 (3) を奇関数の空間で考えると (そのときの最小値を l_ω^{odd} と書く)，$l_\omega^{odd} = 2l_\omega$ という関係があるからである．戍亥氏は基底状態のさらに詳しい性質を調べることにより，作用レベルの制限を緩めることに成功した．戍亥氏は，奇関数という条件を一般の群不変性に置き換え，抽象的な形で定理を証明したため，非線形 Klein-Gordon 方程式など他の非線形波動・分散型方程式に対しても応用可能である．この観点からも，学位論文の主結果は極めて興味深いと言える．

以上が本論文の主要結果である。

（ 続紙 3 ）

（論文審査の結果の要旨）

非線形発展方程式に対する解の大域挙動の分類・決定はきわめて重要な問題である．しかし，一般解の大域挙動をすべて分類することは非常に困難であることも事実である．その困難を回避する方法の一つは，性質がよく分かっている特殊解を基準として，それよりエネルギー準位が低い（あるいは，作用が小さい）解を分類することである．エネルギー保存則や質量保存則を持つ非線形 Schrödinger 方程式の場合，基底状態とよばれる広い意味でのソリトン解が基準となることは古くから知られていた．実際，Fang, Xie and Cazenave (2011) や Akahori and Nawa (2013) の先行研究により，基底状態より作用が小さい解の大域挙動の分類は完全になされていた．他の非線形波動・分散型方程式に対しても，基底状態より小さな作用の一般解については，その大域挙動はほぼ解明されている．その一方で，基底状態を超えた作用を持つ解の挙動については，ほとんど先行研究がない状態であった．戊亥氏は，基底状態の幾何学的対称性に着目し，それと異なる対称性を持つ関数空間で作用の最小値を求めると基底状態より大きくなることを証明した．その結果として，Fang, Xie and Cazenave (2011) や Akahori and Nawa (2013) の論法を基底状態とは異なる対称性を持つ関数空間に適用することによって，その空間に属する解に対しては基底状態の作用を超えても大域挙動が分類・決定できることを証明した．この証明は，定在波の変分法的特徴付けに関する深い考察と，最近進展の著しい Kenig-Merle による最小爆発解論法の群不変バージョンを作ることの二つの部分からなる．いずれの部分も数学的に興味深く，当該分野において高く評価されている．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成２９年１月２５日に試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　年　　　月